PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

19 Sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$.

(a) Finde einen Fundamentalbereich F für $\mathbb{C}/L$. Beweise die entsprechenden Eigenschaften.

(b) Definiere auf F, bzw. $\mathbb{C}/L$ eine natürliche Topologie.

20 (a) Zeige: Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ operiert durch Konjugation auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Induziert dies eine Operation auf der Menge der oberen Dreiecksmatrizen $T_n(\mathbb{C})$?

21 Eine Gruppe G werde von Elementen $s_1, \ldots, s_k$ erzeugt. Operiert G auf einer Menge X, so ist $x \in X$ genau dann G-invariant, wenn $s_i \cdot x = x$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt.

22^s Es sei $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{R}^*$ der n-dimensionale projektive Raum.

(a) Finde ein Repräsentantensystem.

(b) Topologisiere $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

(c)* Zeige, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

23 (a) Sei $G \subset \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ die Symmetriegruppe des Oktaeders. Zeige, dass $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$ und $w = x^2z^2w^2$ invariante Polynome sind.

Hinweis: Erzeugende der Gruppe sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{und} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die drei Polynome erzeugen den Invariantenring als $\mathbb{R}$-Algebra.

(b) Visualisiere mit Hilfe des Programms “Surfer” den Dodekaederstern.

24* Zeige, dass der Invariantenring $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]^{S_n}$ endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra ist,: Es existieren invariante Polynome $P_1, \ldots, P_k$, sodass jedes weitere invariante Polynom Q ein polynomialer Ausdruck in $P_1, \ldots, P_k$ ist.

Hinweis: Versuche zuerst den Fall $n = 2$. Verwende für den allgemeinen Fall ggf. Literatur.